CONCOURS D'ADMISSION A L'ECOLE DE L'AIR

EPREUVE DE MATHEMATIQUES APPLIQUEES

(durée : 1 h 30 - coefficient : 3)

-----oo00oo-----

I.

Soit le polynôme :

$$P(z) = 3z^{10} - 5z^9 - 19z^8 + 49z^7 - 304z^6 + 497z^5 - 954z^4 + 1119z^3 - 783z^2 + 612z + 297 \quad (1)$$

1) Déterminer les zéros de ce polynôme situés sur l'axe OY. Quelle propriété possèdent ces racines ?

2) Soit le polynôme :

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n$$

où tous les a_i appartiennent à $\mathbb{Z}$.

On suppose que $x = \frac{p}{q}$ (avec p et q premiers entre eux) est racine de ce polynôme.

Quelle propriété arithmétique vérifient p et a_n, q et a_0 ?

On admet la propriété suivante :

" $x = \frac{p}{q}$ étant une racine rationnelle du polynôme P(z), et m un entier relatif, (p - mq) divise P(m)."

.../...

Trouver alors l'ensemble des racines rationnelles du polynôme (I).
Factoriser le polynôme P(z) sur le corps des réels.

II.

On pose :

$g(z) = z^5 + 2z^4 - 5z^3 + 8z^2 - 7z - 3$

On admet sans démonstration le théorème connu sous le nom de théorème de DESCARTES :

" P(x) étant un polynôme à coefficients réels, le nombre de ses zéros positifs, chacun étant pris avec son ordre de multiplicité, est inférieur ou égal au nombre de changements de signes (variations), entre deux termes consécutifs dans la suite ordonnée des coefficients de P(x), et est de même parité que ce nombre " (les coefficients nuls étant omis).

1) Démontrer que g(x) admet deux racines négatives α et β.

2) Démontrer qu'il y a exactement une racine réelle positive γ (on pourra démontrer que $g''(x) > 0$ pour $x > 0$).

3) Si $a \in \mathbb{R}$ est tel que :

$g(a)>0$; $g'(a)>0$; $g''(a)>0$; $g^{(3)}(a)>0$; $g^{(4)}(a)>0$; $g^{(5)}(a)>0$; a est alors un majorant des racines positives de g(x).

Justifier cette affirmation. Puis déterminer un majorant de γ. En s'inspirant d'une méthode analogue, trouver un minorant de γ, et un encadrement pour les racines négatives α et β.

4) Calculer à 10^{-8} près les racines par la méthode de NEWTON.

III.

1) Posons :

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n \qquad (II)$$

On définit $A = \text{Max}\,(|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|)$

Vérifier que si z est racine de (II) alors :

$|z| < 1 + \frac{A}{|a_0|}$

Trouver un majorant du module des racines de g(x).

2) En supposant que les coefficients de (II) sont réels avec $a_0 > 0$ désignons par k l'indice du premier coefficient négatif a_k de P(z).

Vérifier que $(1+\sqrt[k]{\frac{B}{a_0}})$ est un majorant pour les zéros positifs de (II), B étant la plus grande valeur absolue des coefficients négatifs de (II).

En déduire une nouvelle majoration de γ.

3) Donner un encadrement de la partie réelle et du module des racines complexes du polynôme g(z).

IV.

Soit la suite récurrente définie par :

$u_0 = 0$, $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$, $u_4 = 1$ et

$u_{n+5} = -2u_{n+4} + 5u_{n+3} - 8u_{n+2} + 7u_{n+1} + 3u_n$.

Calculer les 21 premiers termes de cette suite .

On pose : $q_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Calculer les 20 premières valeurs de la suite (q_n).

Quelle est la limite de (q_n) quand n tend vers $+\infty$?

Pouvez-vous justifier ce résultat ?